Soit $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ tq $|y-z| \leq \eta$

i) $(y,z) \in [-A,A]^2$ OK

ii) $y,z \geq A$, $|f(y)-f(z)| \leq |f(y)|+|f(z)| \leq 2\varepsilon$

iii) $y < A < z$ (par exc.) alors $y > -A$ car $z-y < \eta < A$

et donc $|f(y)-f(z)| \leq |f(y)-f(A)| + |f(A)-f(z)|$

$\leq \varepsilon + 2\varepsilon$

IV Comparaison des normes :

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Déf : Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est plus fine que N_2 (domine N_2) s'il existe $C > 0$ tq $\forall x \in E$, $N_2(x) \leq C N_1(x)$

(Transitivité)

Th : Si N_1 est plus fine que N_2

1) si $(x_n) \xrightarrow{(N_1)} \ell$ alors $(x_n) \xrightarrow{(N_2)} \ell$

2) si F est fermée pour N_1, $\Rightarrow F$ pour N_2

3) Si O est ouvert pour N_1, alors O est ouvert pour N_2

D/ 1) $N_2(x_n - \ell) \leq C \underbrace{N_1(x_n-\ell)}_{\to 0}$ donc $N_2(x_n - \ell) \to 0$.

2) Soit ℓ un point adhérent à F pour N_1, alors $\exists x_n \in F^{\mathbb{N}} \mid x_n \xrightarrow{N_1} \ell$.

avec 1) $x_n \xrightarrow{N_2} \ell$ ie ℓ est adhérent à F pour N_2

De là $\ell \in F$: F est fermé pour N_1

3) On observe $E \setminus O$ est fermé pour N_2

2) $E \setminus O$ ——— N_1 O ouvert pour N_1

Directement : Soit $a \in O$, O étant ouvert pour N_2

$(\exists \varepsilon > 0)\ (B_{N_2}(a, \varepsilon) \subset O)$

Si $N_1(x-a) < \frac{\varepsilon}{C}$, il vient $N_2(x-a) < \varepsilon$, donc $x \in B_{N_2}(a, \varepsilon)$

$B_{N_1}(x, \varepsilon/C)^2 \subset O$

Normes équivalentes:

Def: On dit que N_1 et N_2 sont équivalents s'il existe $A > 0$, $B > 0$ tq $\forall x \in E$, $A N_2(x) \leq N_1(x) \leq B N_2(x)$

Bref: N_1 est plus fine que N_2
N_2 ——— N_1

Not $N_1 \sim N_2$, $\sim$ est une relation d'équivalence.

Th: Si $N_1 \sim N_2$: i) Les suites CV sont les m̂
ii) ——— de Cauchy ———
iii) Les ouverts (resp fermés) sont les mêmes

iv) Les fonctions $\mathcal{C}^0$ ———

v) Les appl lipsh ——— ⚠ rapport change

Ex: $E = \mathbb{K}^n$

il vient $\forall x \in \mathbb{K}^n$ $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \overset{CS}{\leq} \sqrt{n}\|x\|_2$
$\leq n\|x\|_\infty$

(pour p qqq: $\|x\|_\infty \leq \| \ \|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$)

ost
portant thing — Th: Sur un $\mathbb{K}$-ev de dim finie toutes les normes sont équivalentes
in IV

Espaces de fonctions : $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

$$\|f\|_1 \overset{CS}{\leq} \sqrt{b-a}\,\|f\|_2 \leq (b-a)\|f\|_\infty$$

Aucune équivalence $f_n(x) = x^n$ $\quad \|f_n\|_\infty = 1 \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$

$[a,b] = [0,1]$

$f_n \xrightarrow{\|\ \|} 0$ mais $f_n \underset{\|\ \|_\infty}{\not\to} 0$

$\|g_n(x)\| = \sqrt{n}\,x^n$

$\|g_n\| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \to 0$ $\quad \|g_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 n x^{2n}\,dx} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \to 0$

Ex : Comparaison $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ $\quad \|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f'|$ $\quad \|\ \|_\infty$

$*$ $\|\ \| \geq \|\ \|_\infty$, si $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq |f(x_0)| + \int_0^1 |f'| \leq \|f\|$

donc $\|f\|_\infty \leq \|f\|$

$*$ Réciproque : Variation

$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n\pi x)$, $\|f\|_\infty = \frac{1}{n}$: $f_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} 0$

$\|f_n\| = \int_0^1 |\sin n\pi x| \geq \int_0^1 \sin^2(n\pi x)\,dx \geq \frac{1}{2} \not\to 0$

$?$: $\left(\int_a^b f(x)\,|\sin ax|\,dx \to \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\right)$

Ex : (CCP) $\|P\|_\infty = \max(|a_0|, \dots, |a_{\deg P}|)$ $\quad \|P\|_\infty \leq \|P\|_1$

$\|P_1\| = \sum |a_k|$ comparer les normes

Clairement $\|P\|_\infty \leq \|P_1\|$, $\|P\|_\infty \leq \|P\|_1$

Pas de récip.

* Pus dé récip

On pose $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k x^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} (-x)^n\right)'$

$= \left(x \frac{1-(-x)^n}{1+x}\right)'$

$\left|\frac{P_n(x)}{n}\right| = O(1)$, $\frac{\|P_n\|}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} \to \infty$

V Espaces produits:

On se donne p espaces métriques $E_1, \dots, E_p$

On cherche la plus petite topologie $\mathcal{T}$ sur $E_1 \times \dots \times E_p = E$ qui rendent les projections $\pi_i \begin{pmatrix} E \to E_i \\ X \to x_i \end{pmatrix}$ continues

Ouverts élémentaires: $\pi_i^{-1}(\omega_i) = E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times \omega_i \times E_{i+1} \times \dots \times E_p$, ω_i ouvert dans E_i

Ainsi que les intersections finis $r = 1 \dots p$ | $\omega_1 \times \dots \times \omega_p$, ω_i ouvert de E_i

A) Metrique produit:

(E_i, d_i)

On munit E de $d(x,y) = \max d_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq p$

Obs: $B_d(X, \varepsilon) = \{y \in E \mid \forall i, d_i(x_i, y_i) < \varepsilon\}$

$= B_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times \dots \times B_{d_p}(x_p, \varepsilon)$

Vocabulaire: on appelle pavé ouvert tout produit $\omega_1 \times \dots \times \omega_p$ où ω_i est ouvert dans E_i $i = 1, \dots, p$

Prop: 1) Tout pavé ouvert de E est ouvert pour d

2) Tout ouvert de (E, d) est réunion de pavés ouverts

D) 1) soit $(a_1, \dots, a_p) \in \omega_1 \times \dots \times \omega_p$

~~On~~

Chaque ω_i est ouvert dans E_i $\exists \varepsilon_i > 0$ $B(a_i, \varepsilon_i) \subset \omega_i$

On pose $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$

$$B_d(a,\varepsilon) = \prod_1^p B_{d_i}(a_i,\varepsilon) \subset \prod_1^p B_{d_i}(a_i, \varepsilon_i) \subset \prod_1^p \omega_i \text{ OK}$$

2) Soit O un ouvert de (E, d) pour tout $a \in O$ il existe $\varepsilon_a > 0$ tq $B_d(a, \varepsilon_a) \subset O$, mais $B_d(a, \varepsilon_a) = \underbrace{\prod_{i=1}^p B_{d_i}(a_i, \varepsilon_a)}_{\text{est un pavé}}$

et $O = \bigcup_{a \in O} \underbrace{B_d(a, \varepsilon_a)}_{\text{pavé}}$ OK

Prop Si F_i est fermé ds E_i $i = 1, \dots, p$ $F_1 \times \dots \times F_p$ est fermé.

D/ $F_1 \times \dots \times F_p = \bigcap_1^p G_i$, $G_i = E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times F_i \times E_{i+1} \times \dots \times E_p$

$$\complement_E G_1 = \underbrace{(E_1 \setminus F_1)}_{\text{ouvert}} \times E_2 \times \dots \times E_p$$

G_1 est fermé, idem $G_2, \dots, G_p$: $F_1 \times \dots \times F_p$ est fermé

Cas de $\mathbb{R}^n$ distance $\|x-y\|_\infty$

Boules $B(x,\varepsilon) =]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times \dots \times]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[$

Pavé ouvert : $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ Ω_i ouvert de $\mathbb{R}$

Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion de produits $\prod_1^n]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[$ (ε varie avec x)

|| Par équivalence des normes en dim finie, si $\|\ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, elle donne la topologie produit

Propriétés : Associativité

Commutativité

Projection : 1) Soit $k \in [1, p]$ Π_k est 1-lipsh

$d_k(x_k, y_k) \leq d(x, y)$ $x_k = \Pi_k(x)$, $y_k = \Pi_k(y)$

2) Si O est ouvert dans E, $\Pi_k(O)$ est ouvert dans E_k

Soit $a_k \in \Pi_k(O)$: $a_k = \Pi_k(a)$ où $a \in O$

O étant ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tq $B_d(a, \varepsilon) \subset O$

$\prod_1^n B_{d_i}(a_i, \varepsilon)$

alors $\Pi_k(B_d(a, \varepsilon)) \subset \Pi_k(O)$

Soit $B_{d_k}(a_k, \varepsilon) \subset \Pi_k(O)$

⚠ La projection d'un fermé est pas forcément un fermé

C-ex $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ fermé sur $(x, y) \to xy$ est C

C-ex utile $\Pi(F) = \mathbb{R}^*$ ouvert non fermé

B) Fonctions à valeurs dans un espace produit :

Suites : $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^p) \to a \iff d(x_n, a) \to 0$

$\iff \max_{1 \leq i \leq p} d(x_n^i, a_i) \to$

$\iff \forall i \in [1, p]$ $x_n^i \to a_i$

Fonctions : $f : A \to E$, $a \in \bar{A}$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ f_i composantes

$\exists \lim_{\substack{u \to a \\ u \in A}} f(u) = l \iff \forall i \exists \lim_{\substack{u \to a \\ u \in A}} f_i = l_i$

dans ce cas $l = (l_1, \dots, l_p)$

$\Rightarrow$ On applique le thm des compositions à $\Pi_i \circ f$

(⇐) perso

③ $f : X \to E$, $a \in X$, $f(f_1, \dots, f_p)$, alors f est continue en a $\iff$ chaque f_i est $\mathcal{C}^0$ en a

C) Fonctions partant d'un espace produit :

☹ membrane sont donc quand combiné ?

Soit $f : E_1 \times \dots \times E_p \to Y$. Si f est $\mathcal{C}^2$ en $a = (a_1, \dots, a_p)$, appl partielles (en a)

$$\begin{cases} E_i \longrightarrow Y \\ x \longrightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p) \end{cases}$$

soit $\mathcal{C}^{0}$ en a $\overbrace{\text{Not } f(a_1, \dots, a, \dots, a_p)}$

$f(a_1, \dots)$,

Prop : si $f : E_1 \times \dots \times E_p \to Y$ est $\mathcal{C}^0$ en a, ses applications partielles sont $\mathcal{C}^0$ en a :

D/ $j_1 : x_1 \in E_1 \Rightarrow (x_1, a_2, \dots, a_p)$ est une isométrie de E_1 dans $E_1 \times \dots \times E_p$, donc $\mathcal{C}^{0}$ $(\eta = \varepsilon)$

La première appl partielle de f en a est $f \circ j_1$ par composition, elle est $\mathcal{C}^0$

Dérivée partielle E_i int ouverte de $\mathbb{R}$

on regarde la dérivabilité de en a_i
$x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p)$

si elle est acquise, la dérivée en x est notée

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial x_i}$$

UNDERSTAND EVERY SINGLE DETAIL

Appl C^1 : f $\mathcal{C}^0$ " possède des D Partielles $\mathcal{C}^0$ " sur $E_1 \times \dots \times E_p$

~ ⚠ Si les appl sont $\mathcal{C}^0$ ", f n'est pas néc continue

Ex : $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

en dehors de $(0,0)$ c'est OK

En $(0,0)$ $\begin{cases} f(0,\cdot) = 0 \\ f(\cdot,0) = 0 \end{cases}$

$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$, f n'est pas $\mathcal{C}^0$ en $(0,0)$

Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ possédant des appl. partielles $\mathcal{C}^0$. Mq f est limite simple de fonctions $\mathcal{C}^0$

D) Polynômes à plusieurs indéterminés :

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On pose $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'ensemble des sommes (formelles) finies :

$$\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A,\ A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}^n)} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$$

Voc : $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ coefficient | degré total du monôme $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$X_1^{\alpha_1}, \dots, X_n^{\alpha_n}$ monôme | degré partiel en X_i : α_i

Degré total du polynôme : $\max\{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \mid a_\alpha \neq 0\}$

partiel en X_i : $\max\{\alpha_i \mid a_\alpha \neq 0\}$

Homogène de degré d : $\forall \alpha\ a_\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 + \dots + \alpha_n = d$

On note $H_d(X_1, \dots, X_n)$ l'ensemble des pol. homogènes de degré d.

Lois : addition : $P+Q=\sum_{\alpha\in C\,\text{fini}} (a_\alpha+b_\alpha)X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$

Produit : $\sum_{(\alpha,\alpha')\in A\times B} a_\alpha \cdot a_{\alpha'} X_1^{\alpha_1+\alpha_1'}\cdots X_n^{\alpha_n+\alpha_n'}$

Props : ① $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} H_d(X_1,\dots,X_n)$ $\Big\}$ $P\in H_d$ $Q\in H_{d'}$ $PQ\in H_{d+d'}$

D/ On regroupe les monômes par degré

② $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ est une $\mathbb{K}$-Algèbre commutative unitaire intègre

$\alpha : a_\alpha\neq 0$ α max pour l'ordre lex
$\alpha' : b_{\alpha'}\neq 0$, α'
$\Rightarrow a_\alpha b_{\alpha'} X_1^{\alpha_1+\alpha_1'}\cdots X_n^{\alpha_n+\alpha_n'}$ maxi pour le produit

Autre methode : recurrence : $P(X)=\sum_{k=0}^{m} A_k(X_1,\dots,X_{n-1})X_n^k$ pour $A_m\neq 0$

$Q(X)=\sum_{l=0}^{m'} B_l(X_1,\dots,X_{n-1})X_n^l$ — $B_{m'}\neq 0$

A lors par rec $A_m B_{m'}\neq 0$

le coeff mult pour $X^{m+m'}$ est $\neq 0$

III.2 Fonctions polynômes : à $P\in\mathbb{K}(X_1,\dots,X_n)$ on attache $\tilde{P}$

$\tilde{P} : \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$
$(x_1,\dots,x_n)\mapsto \sum_{\alpha\in A} a_\alpha x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$

L'application $\begin{pmatrix}\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]\to\mathcal{F}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K})\\ P\mapsto\tilde{P}\end{pmatrix}$ est un morphisme d'algèbre unitaire

Th : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Pour tout $P\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$, $\tilde{P}$ est C^∞

D/ $\tilde{X_i}$ n'est autre que la $i$ième projection $\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$

donc $\tilde{X_i}$ est continue. Par produit, $X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$

conte lin

est $\mathcal{C}^{0}$ // par CL : $\tilde{P}$ est $\mathcal{C}^{\infty}$

Th (AHP) : Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties infinies de $\mathbb{K}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Si $\tilde{P}$ s'annule sur $A_1 \times \dots \times A_n$, P est (identiquement) nul.

D/ Par récurrence sur $n \geq 1$, (H_{n-1})

Pour $n \geq 2$: On écrit $P = \sum_{k=0}^{m} Q_k(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^k$

Soit $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in A_1 \times \dots \times A_{n-1}$. Pour tout $a_n \in A_n$

$0 = \tilde{P}(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = \sum_{k=0}^{m} Q_k(a_1, \dots, a_{n-1}) a_n^k$

Le polynôme $Q(Y) = \sum_{k=0}^{m} Q_k(a_1, \dots, a_{n-1}) Y^k$ possède donc une infinité de zéros. $(n=1)$ Q est nul $Q_k(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0$

On applique (HR) à chaque Q_k est nul, $k = 0 \dots m$ donc $P = 0$ dans $\mathbb{K}[X_1, \dots]$

Exercices ①: Mq $\{ M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det M \neq 0 \} = GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert

S/ $M_n(\mathbb{C}) \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{ M \mid \det M = 0 \}$. Or det est un polynôme à plusieurs ~~variables~~ indéterminés donc continue. Donc $\{ \det M = 0 \}$ est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$

② Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \neq 0$ Mq $\{\tilde{P} = 0\} = V(P)$ $= \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n / \tilde{P}(z_1, \dots, z_n) = 0\}$ est fermé d'intérieur vide

$\tilde{P}$ est $\mathcal{C}^{0}$ donc l'ensemble de ses zéros est fermé

Si $\mathring{V}(P)$ est non vide, et ouvert contient une boule $B(a,r)$ pour $\| \|_\infty$

Or $B(a,r) = \{(z_i) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - a_i| < r,\ i = 1 \dots n\}$

$= D(a_1,r) \times \dots \times D(a_n,r)$ produit de parties infinies

Selon le th. précédent, $P = 0$, absurde

Ex Soit $P \in \mathbb{C}[X,Y]$, non constant. Alors $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 / P(x,y) = 0\}$ est infini

S/ $P(X,Y) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(X) Y^k$, * si $n = 0$ $Q_0(X) \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$

donc possède une racine (au moins), soit a.

$\{a\} \times \mathbb{C} \subset V(P)$

Complexité

$n \geq 1$ $Q_n \neq 0$: $A = \{a \in \mathbb{C} \mid Q_n(a) \neq 0\}$ est infini

Si $a \in A$, $z \to \sum_{k=0}^{n} Q_k(a) z^k$ est un polynôme de degré n

il s'annule (en n points avec multiplicité)

il existe $b_1, \dots, b_n$ tq $(a,b_1), \dots, (a,b_n)$

Comme A est infini $V(P)$ est infini

Rq: Si $n \geq 1$ $Q_n = \lambda \neq 0$. $P(X,Y) = \lambda Y^n + Q_{n-1}(X) Y^{n-1} + \dots + Q_0(X)$

V Compacité:

A) Valeurs d'adhérences

On adopte le cas réel / complexe a (X,d) un espace métrique